ACTES DE LES IV TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(ALCOI-BARCELONA, SCHCT, 1997), 663-669

DE LOCIS PLANIS: UN MANUSCRIT INÈDIT DE J. ZARAGOZÀ

Eduard Recasens i Gallart
Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: Llocs plans, Restitucions, Apol·loni, Zaragozà

De locis planis: an unpublished manuscript by J. Zaragozà

Summary: *Commandino's translation into latin of Pappo's Synagoge in 1588 makes it possible to recover some lost books of Greek Geometry through their conjectural reconstruction, called 'Restitutions'. We know three restitutions of Apollonius'* Plane Loci, *the authors of which are Fermat, Schooten and Simson. Now we have found a lost manuscript called* De Locis Planis *by J. Zaragozà (seventeenth century) a Spanish jesuit who teached mathematics in the Colegio Imperial of Madrid.*

Keywords: *Plane loci, Restitutions, Apollonius, Zaragozà.*

Al segle XVI F. Commandino tradueix per primera vegada al llatí la Synagogé de Pappos (300 d.C.) sota el títol *Alexandrini Mathematicae Collectiones* (Pisa 1588). Aquesta traducció de Commandino descobreix als matemàtics de finals del s.XVI i començaments del XVII una part important de la geometria grega que fins aleshores havia romàs desconeguda. El llibre de Pappos conté un recull d'enunciats no sempre demostrats, amb els quals s'intentava donar notícia de la geometria grega dels «Antics», és a dir, els geòmetres de l'època d'Apol·loni i d'altres anteriors a ell. En conjunt és una obra que es fa difícil de llegir tant per l'estil més aviat obscur de Pappos com per les implícites referències a obres avui perdudes.

Aquest esforç de lectura i comprensió del llibre de Pappos el començaren a realitzar els matemàtics del segle XVII. Fruit d'aquestes lectures foren una sèrie de treballs consistents a demostrar tot allò que Pappos no havia demostrat. La labor consistia a, a partir de Pappos (via la traducció llatina de Commandino), intentar reconstruir les obres perdudes dels grecs.

Engrescats en aquesta tasca hi trobem noms importants com els de Vieta, Ghetaldi, Snell, Fermat, Pascal, Schooten...

Dins d'aquesta tasca de recuperació (i extensió) de la geometria dels grecs és on cal situar gran part de la labor investigadora dels geòmetres jesuïtes professors del Col·legi Imperial de Madrid durant el segle XVII. Destaquen principalment els noms de La Faille, C. Richard i J. Zaragozà.

La Sinagoge de Pappos constava de vuit llibres. Un dels més apreciats pels matemàtics del XVII fou el setè, ja que en aquest hi ha l'única referència que tenim sobre una colla de llibres grecs, que constituïen allò que els llibres d'història anomenen *Domini de l'anàlisi*. Els grecs anomenaven «mètode de l'anàlisi» el procediment per trobar demostracions de teoremes o bé construccions en el cas de problemes : suposat cert allò que es pretenia demostrar, s'inferien conseqüències fins a arribar a quelcom ja establert i d'aquí, si era possible la inversió del procés, s'obtenia la demostració o síntesi del teorema, i és aquesta última part l'única que apareixia en els textos. Als llibres que formaven el *Domini de l'anàlisi* hom trobava resultats que facilitaven el procés de reducció analítica. En particular, els «llocs geomètrics» descrivien la corba o superfície on es trobava un punt obligat a complir certes condicions. Si el lloc geomètric estava format per punts d'una línia recta o bé d'una circumferència s'anomenava «lloc pla» perquè aquestes línies podien ser construïdes sense necessitat d'haver de recórrer a les tres dimensions del sòlid. (Si el lloc geomètric estava format pels punts d'una el·lipse, una hipèrbola o una paràbola es deia que era un «lloc sòlid» ja que els grecs obtenien aquestes còniques tallant un con per un pla i això requereix tres dimensions).

Una de les obres que formaven part del *Domini de l'anàlisi* estava constituïda per dos llibres i portava per nom *Llocs plans,* el seu autor és Apol·loni de Perga. Aquests dos llibres es perderen al llarg del mil·leni que separà el món clàssic dels grecs de l'època renaixentista, de manera que en arribar el segle XVI l'única referència que de *Llocs plans* es tenia era la síntesi que Pappos dóna al setè llibre de la Sinagoge.

Pappos és molt breu a l'hora de parlar-nos dels 147 teoremes i 8 lemes de què constaven els dos llibres de *Llocs plans* d'Apol·loni. Es limita a elaborar vuit enunciats-resum com a síntesi del llibre I i uns altres vuit enunciats-resum pel llibre II (i hi afegeix vuit le-mes propis, els quals demostra, i que diu que han de servir per a estudiar els dos llibres d'Apolloni.

Fermat fou el primer que s'encarà amb la Restitució de *Llocs plans.* La inicià l'any 1628 i l'acabà l'any 1636 (o potser una mica abans) però no es publicaria fins a l'any 1679 amb el recull dels seus treballs a *Varia Opera Mathematica*, amb tot, Fermat regularment comunicà els seus resultats mitjançant correspondència privada amb els seus amics.

L'any 1656 F.Schooten publica una obra titulada *Exercitationum Mathematicarum* constituïda per cinc llibres, i en el tercer d'aquests llibres s'hi troba una restitució de *Llocs plans* on cal dir que en algunes de les demostracions utilitza el llavors recent mètode de tractament algebraic de les entitats geomètriques que havia après de Descartes.

Al segle XVIII, R.Simson considera que Fermat i Schooten en les seves demostracions a *Llocs plans,* s'allunyen dels mètodes clàssics propis del grecs, i llavors elabora una tercera restitució de *Llocs plans* seguint estrictament Pappos i no fent ús d'altres tècniques de demostració que no siguin aquelles que utilitzaven els grecs. Aquesta restitució es publica l'any 1749 amb el títol *Apollonii Pergaei Locorum Planorum.*

No és fàcil captar l'esforç que degué suposar l'elaboració d'aquestes restitucions si no es té al davant l'escuet llistat de Pappos, i d'altra banda és difícil valorar el seu ajustament a l'original, ja que d'aquest no se'n sap res. En el cas de Schooten però, queda clar que Apol·loni no utilitzà els recursos algebraics que ell fa servir en algunes proposicions, i en el cas de Fermat tot i que no utilitza recursos algebraics, la restitució resulta bastant algebraica (Mahoney 1973, argumenta que en el cas del lloc cinquè del llibre II, Fermat degué intuir i emprar per primera vegada el mètode que és propi de la geometria analítica per a trobar-ne la seva demostració). Fermat ja hauria finalitzat la restitució de *Llocs plans* el

1630, si no fos per a aquest lloc cinquè del llibre II per al qual no acabava de trobar la demostració).

Possiblement, si alguna d'aquestes tres restitucions s'ha d'assemblar a l'original, aquesta sigui la de Simson qui, a propòsit, segueix estrictament la metodologia dels grecs.

Aquesta incertesa sobre la semblança de les restitucions amb l'original fa que tingui interès que n'hi hagi diversee de la mateixa obra feta per autors diferents per poder-ne fer un estudi comparatiu. Aquest hivern passat (1996) i dins el marc d'un treball de recerca de revisió de distintes obres dels jesuïtes professors del Col·legi Imperial de Madrid, hem trobat a l'Acadèmia de la Història de Madrid un manuscrit inèdit de J. Zaragozà sobre *Llocs plans* d'Apol·loni. A.Cotarelo el cita a *El P. José de Zaragoza y la Astronomia de su tiempo* (1935, pàg. 124) on dóna un llistat de les obres de Zaragozà i parla d'un *De Locis Planis* que mai s'ha trobat. D'altra banda hi ha un llibret d'un tal Antiogo Santucho (un alumne de J. Zaragozà) que porta per nom *Engaños de la otra vida* (el títol és rar però és que el llibre de Santucho contesta a un altre llibre escrit per un tal Andrés Davila on s'ataca Zaragozà per boca d'un personatge ja traspassat), on es fa un repàs exhaustiu a les obres del seu mestre i es diu que «En latin estan perficionadas las obras siguientes: *Loca Plana Apolloni Pergaea* donde se demuestran los lugares planos que sirven para saber resolver nuevos problemas y hay muchos lugares añadidos a los que restituyó Francisco Schooten...»

El manuscrit de J. Zaragozà consta de 136 proposicions enunciades i demostrades dins l'estil de la geometria clàssica.

Aquestes 136 proposicions de Zaragozà no segueixen l'ordre del llistat de Pappos, però cadascuna d'elles es pot relacionar amb algun dels enunciats de Pappos, ja sigui perquè demostra allò que simplement està enunciat, ja sigui perquè en dóna alguna extensió o bé perquè en deriva nous resultats.

Vegem com a exemple algunes de les proposicions de Zaragozà, que estan lligades al poc clar primer enunciat de Pappos referent al llibre I de *Llocs plans* que diu així, segons la versió de Commandino:

> «Si duae lineae agantur, vel ab uno dato puncto, vel a duobus, et vel in rectam lineam, vel parallelae, vel datum continentes angulum, vel interse datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spacium: contingat autem terminus unius locum planum positione detum, el alterius terminus locum planum positione datum continget, interdum quidem eiusdem generis, interdum uero diversum, et interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.»

A la proposició 33, Zaragozà ens diu que si des d'un punt donat hom tira en línia recta dues rectes que estan en una raó donada, i l'extrem d'una d'elles recorre una recta, l'extrem de l'altra recorrerà una altra recta. I si l'extrem d'una d'elles recorre una circumferència, l'extrem de l'altra també recorrerà una circumferència.

A les proposicions 35 i 36 se'ns diu que si des d'un punt donat A es tiren en línia recta dues rectes AB, AC de manera que el rectangle format per aquestes dues rectes té una àrea donada, llavors si el punt B recorre una recta, el punt C recorrerà una circumferència. I si el punt B recorre una circumferència, el punt C també recorrerà una circumferència.

A la proposició 37 se'ns diu que si des d'un punt donat hom considera dues rectes formant un angle donat i una raó donada, llavors si l'extrem d'una d'elles recorre una recta, l'extrem de l'altra també recorrerà una recta. I si l'extrem d'una d'elles recorre una circumferència, l'extrem de l'altra també recorrerà una circumferència.

Amb enunciats d'aquest tipus arribem fins a la proposició 45. O sigui que Zaragozà fa servir 13 proposicions per desenvolupar el primer enunciat de Pappos, que tal com Zaragozà el desenvolupa veiem que fa referència (en llenguatge actual) a transformacions de rectes i circumferències mitjançant homotècies, rotacions i inversions.

Podem veure l'aspecte d'aquest manuscrit de Zaragozà a través del facsímil (que aquí oferim) on hi ha la proposició 44.

En aquesta proposició 44 es consideren donats dos punts A i B, una recta s, un angle P i una àrea Z (vegen la figura adjunta que està treta del manuscrit de Zaragozà, les lletres r, s, t i els angles senyalats P en la intersecció d'aquestes rectes no són del manuscrit, els he posat per facilitar l'explicació que segueix).

Pel punt A es traça la perpendicular AD a la recta s i pel punt B la recta BF, de manera que aquestes rectes AD i BF formin l'angle donat P i de manera que l'àrea del rectangle de costats AD, BF sigui l'àrea donada Z. Llavors, si pel punt A es traça una recta arbitrària r i pel punt B una recta t, de manera que aquestes rectes r i t formin l'angle donat P i es considera el punt C (intersecció de les rectes r i s), i E és el punt de la recta t tal que el rectangle de costats AC, BE té d'àrea la donada Z, demostra que el punt E es troba en la circumferència de diàmetre BF que passa pels punts B, F. Dit altrament, mentre els diversos punts C recorrin la recta s, els corresponents punts E recorreran la circumferència BEF. O sigui, que un lloc pla que és una recta es transforma en un lloc pla que és una circumferència.

La demostració de Zaragozà d'aquesta proposició 44 consisteix a demostrar que els triangles BEF i ACD són semblants i que, per tant, l'angle E serà un recte i en conseqüència els diferents punts E, construïts segons les indicacions anteriors, estaran en una circumferència.

En arribar a les proposicions 61 i 62, Zaragozà tracta del lloc geomètric que Pappos descriu com a cinquè en el llistat del llibre II, el qual i segons la versió de Commandino diu: «Si a quotcomque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectae lineae et sint species, quae ab omnibus fiunt data spatio aequales punctum continget positione datam circumferentiam.»

Per a la demostració d'aquesta proposició Zaragozà remet al seu llibre *Geometria Magna in Minimis* (1674), en el qual desenvolupa tota una nova teoria geomètrica basada en el concepte creat per ell de «Centre mínim». Aquest llibre de Zaragozà és un exemple més de com els matemàtics del XVII no es limitaren a demostrar les proposicions d'Apol·loni sinó que inspirant-se en elles crearen noves teories.

Bibliografia

COMMANDINO, F. (1588), *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones,* Pisauri.

MAHONEY, M. S. (1973), *The mathematical Career of Pierre de Fermat,* Princeton University Press.

RECASENS, E. (1994), «J. Zaragoza's Centrum Minimum, an early version of Barycentric Geometry». *Archive for History of Exact Sciencies, Volume 46, Number 4, 285-320.*

Nota: Aquest treball ha estat parcialment finançat amb un ajut de la Conselleria d'Educació i Ciència de la Generalitat de València. GV – 2409 – 94.

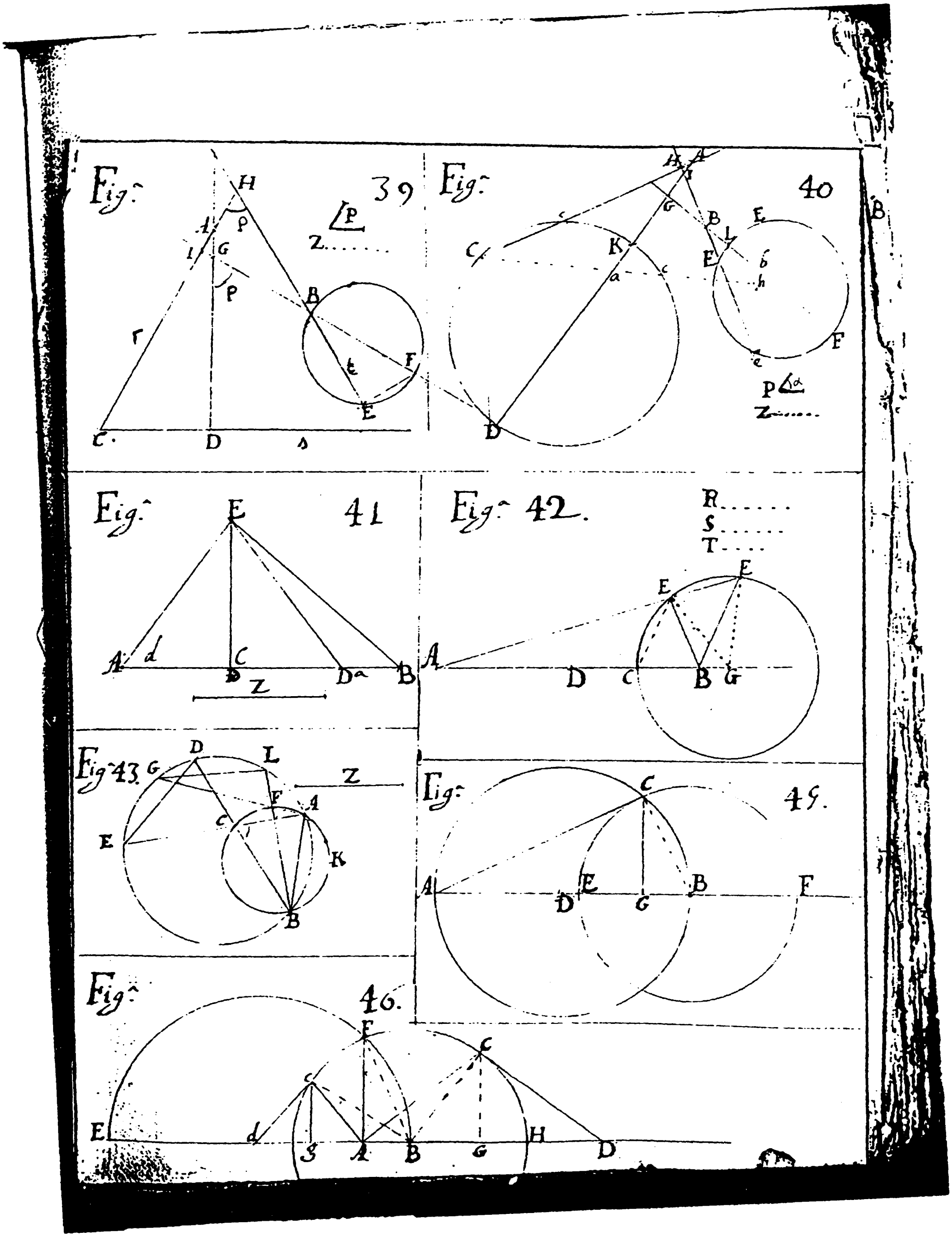

Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42.
Fig. 43
Fig. 45.
Fig. 46.

199

Propositio 44ª.

Si ex duobus punctis rectae agendae sint in dato angulo, et datum spatium comprehendentes, et una terminatur ad rectam, locus alterius erit circulus per punctum, et e converso.

Demonstratio. Fig. 39.

Ex A. et B. ducendae sint AC. BE. et angulus AHB. sit = P. et ▭ AC. BE = □ Z. et AC terminetur ad rectam CD. fiat AD. perpendicularis ipsi CD. et ut AD. ad Z. ita Z. ad BF. et angulus DGB = P. supra BF. describatur circulus BEF. locus quaesitus.

Quia si ducantur quaevis AC. et BE. ut angulus FBE. sit = CAD. quia angulus E. in semicirculus est rectus (31.3.) sicut D. et anguli CAD. FBE. =. erunt ΔΔ. CAD. FBE. aequiangula, et AC. ad BF. ut AD. ad BE. (4.6.) quare ▭ CA. BE. = ▭ AD. BF. (16.6.) hoc est □ Z. et quia ΔΔ. AIG. HIB. habent angulum I communem, et HBI. vel FBE : IAG = ex constr. erit IHB. = ipsi IGA. vel DGB. (32.1.) hoc est ipsi P. ex constr. quod erat demonstrandum

Si autem BE. terminetur ad datam circumferentiam BEF. per B. ducatur BF. per centrum et AGD. ut angulus DGB. sit = dato P. et fiat ut BF. ad Z. ita Z. ad AD. cui sit DC perpendicularis. et erit locus quaesitus. Quia si quaevis ACH. BEH. efficientes angulum H. = P. ducantur. erit ▭ AC. BE. = AD. BF. vel □ Z. quod demonstrabitur, ut antea; quod erat demonstrandum

Fig: 39